Một số phân phối xác suất thường gặp

Môn: Xác Suất Thống Kê

Nhóm 10 K41 Toán C

Trường ĐH Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh

Ngày 8 tháng 4 năm 2016

Nội dung bài học

1. Phân phối rời rạc
   - Phân phối Hình học
   - Phân phối nhị thức
   - Phân phối Poisson
   - Phân phối siêu hình học
2. Phân phối liên tục
   - Phân phối mũ
   - Phân phối chuẩn
   - Phân phối chi-bình phương
   - Phân phối Student

Phân phối Hình học

Định nghĩa

Phép thử với 2 hậu quả đúng hoặc sai, xác suất xảy ra đúng là p. Gọi X là số phép thử được tiến hành cho đến khi hậu quả đúng xuất hiện thì dừng

$$f(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x$$

Kỳ vọng: $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$ Phương sai: $\sigma^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$

Phân phối nhị thức

Định nghĩa

Đại lượng ngẫu nhiên X rời rạc nhận một trong các giá trị từ 0, 1,...,n với các xác xuất tương ứng được tính theo công thức Bernoulli:

$$P_x = P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

gọi là phân phối nhị thức với tham số n và p.
Kí hiệu: $x \sim B(n, p)$

Công thức: với h nguyên dương và $h \leq n - x$, ta có:

$$P(x \leq X \leq x + h) = P_x + p_{x+1} + \ldots + P_{x+h}$$

Phân phối nhị thức

Ví dụ 1: tỷ lệ phế phẩm trong lô sản phẩm là 3%. Lấy ngẫu nhiên 100 sản phẩm ra kiểm tra. Tìm xác suất để trong đó:
a) có 3 phế phẩm
b)có không quá 3 phế phẩm

Phân phối nhị thức

Ta thấy việc lấy ra 100sp như là $n = 100$ phép thử với xác xuất lấy ra phế phẩm $p = 0.03$.
a) Gọi A: biến cố lấy ra 3 phế phẩm

Áp dụng công thức Bermoulli:
$P(X = 3) = C_{100}^{3}(0.03)^3(1 - 0.03)^{97} = 0.2274$
b) B: biến cố lấy ra không quá 3 phế phẩm.
$P(0 \leq X \leq 3)$
$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.647$

Phân phối nhị thức

Các tham số đặc trưng

Nếu $x \sim B(n, p)$, ta có:

- $E(X) = np$
- $D(X) = npq$

Chứng minh tính chất

- $\mu = E(x) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} =$
  $\sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{(x-1)(nx)!} p^x q^{nx} =$
  $np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-1-x+1)!} p^{x-1} q^{n-1-x+1} = np$
- $D(x) = E(X^2) - [E(x)]^2 = E(X^2) - E(X) + E(X) - [E(x)]^2$
  tính $E[X(X-1)] = n(n-1)p^2$ (tương tự như trên)
  Suy ra $D(X) = npq$

Phân phối Poisson

Định nghĩa

Đại lượng ngẫu nhiên rời rạc X có phân nhận một trong các giá trị 0,1,...,n với các xác xuất tương ứng được tính theo công thức:

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

được gọi là có phân phối Poisson với tham số λ.
Kí hiệu: $X \sim P(\lambda)$

Phân phối Poisson

Giả sử X là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối nhị thức với tham số (n,p) và $\lambda = np$ trong đó n khá lớn p khá bé.

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{n!}{(n-k)!k!}p^k(1p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Phân phối Poisson

Do n khá lớn và p khá bé nên:

- $\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$
- $\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \approx 1$
- $\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1$

Vậy từ công thức Bernoulli ta có công thức xấp xỉ:

$$P_k = P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a}$$

Phân phối Poisson

Ví dụ 2: Một máy dệt có 1000 ống sợi. Xác suất để 1 giờ hoạt động có 1 sợi bị đứt là 0.002. Tìm xác suất để trong 1 giờ máy hoạt động có không quá 2 sợi bị đứt.

giải:

Việc quan sát ống sợi có bị đứt hay không trong 1 giờ được coi như 1 phép thử nên ở đây ta có 1000 phép thử n=1000

Phân phối Poisson

Gọi A là biến cố ống sợi bị đứt và X là số sợi bị đứt trong 1 giờ. Ta có $P(A) = 0.002$ và $x \sim B(1000; 0.002)$
Ta áp dụng công thức phân phối Poisson với n=1000 và $\Lambda = np = 2$

Phân phối Poisson

Các tham số đặc trưng

$X \sim P(\lambda)$

$E(X) = D(X) = \lambda$

Ứng dụng

Số lỗi sai trong một số trang trong 1 cuốn sách.
Số người trong một cộng đồng sống tới 100 tuổi.
Số cuộc gọi điện thoại gọi sai trong 1 ngày.
Số khách hàng vào bưu điện trong 1 ngày.

Phân phối siêu hình học

Xét tập gồm N phần tử, trong đó có M phần tử có tính chất A nào đó. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ tập hợp ra n phần tử. Gọi x là số phần tử có tính chất A trong n phần tử mới lấy ra.

$$P_x = P(X = x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

Phân phối siêu hình học

Định nghĩa

Đại lượng ngẫu nhiên X nhận một trong các giá trị 0,1,..,n với các xác xuất tương ứng được tính theo công thức

$$P_x = P(X = x) = P_x = P(X = x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

được gợi là phân phối siêu bội với tham số N, M, n.
Kí hiệu: $x \sim H(N, M, n)$

Phân phối siêu hình học

Ví dụ: Một lô hàng có 10sp, trong đó có 6sp tốt. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại từ trong lô hàng ra 4sp. tìm xác suất để có 3sp tôt từ 4sp được lấy ra.

Giải:

N=10, M=6, n=4

$$P(X = 3) = \frac{C_6^3 C_4^1}{C_10^4} = 0.3809$$

Phân phối siêu hình học

Các tham số đặc trưng

$X \sim H(N, M, n)$

- E(X)=np
- $D(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$

Khi $n \ll N$ thì

$$\frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \approx C_n^x p^x q^{n-x}$$

với $p = \frac{M}{N}$; q=1-p

Phân phối mũ

Định nghĩa:

X là biến ngẫu nhiên liên tục có phân phối mũ tham số $\lambda (\lambda > 0)$ nếu hàm mật đọ của X có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

λ là số biến cố xảy ra trung bình trong một đơn vị thời gian.
X là đơn vị thời gian cho đến biến cố kế tiếp.

Phân phối mũ

Tính chất

Hàm phân phối: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

Kỳ vọng: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ phương sai:
$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Phân phối mũ thường xuất hiện trong các bài toán về thời gian sống của một loài sinh vật, tuổi thọ của thiết bị hoặc khoảng thời gian giữa hai lần xuất hiện cuat một biến cố E nào đó mà số lần x.hiện của E tuân theo luật phân bố Poisson .

HÀM MOMENT SINH

ĐỊNH NGHĨA: Cho hàm mật độ xác suất f(x) thì hàm sinh là:

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in S} e^{tx} f(x)$$

TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG:

$\mu = E(X) = M'(0)$

$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = M''(0) - [M'(0)]^2$

ỨNG DỤNG HÀM SINH

Đặt vấn đề: Tìm giá trị trung bình μ và phương sai σ^2 bằng hàm sinh của phân phối mũ (BT 18).

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$\frac{\lambda}{\lambda - t}; (\text{xét}\, t < \lambda)$$

$$\Rightarrow M'(t) = \frac{\lambda}{(t-\lambda)^2} \Rightarrow \mu = M'(0) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow M''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \Rightarrow E(X^2) = M''(0) = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Phân phối mũ

Ví dụ 1: Tuổi thọ của một mạch điện trong máy tính là một biến ngẫu nhiên có phân bố mũ tham số $\lambda > 0$. G/s tuổi thọ trung bình của mạch điện tử là $\frac{1}{\lambda} = 6.25$ (năm).Thời gian bảo hành là 5 năm. Hỏi có bao nhiêu phần trăm mạch điện tử bán ra phải thay thế trong thời gian bảo hành?

Giải: Gọi X là tuổi thọ của mạch điện tử. Xác suất để mạch điện bị hỏng trong thời gian bảo hành là:

$$P(X \leq 5) = 1 - e^{-5\lambda} = 1 - e^{\frac{-5}{6.25}} = 0.551$$

Vậy có khoảng 55% số thiết bị điện tử bán ra phải thay thế trong thời gian bảo hành

Phân phối mũ

Ví dụ 2: Số khách hàng đến một quầy dịch vụ với tỉ lệ là 15 người một giờ. Hỏi xác suất thời gian giữa 2 khách hàng liên tiếp đến quầy dịch vụ ít hơn 3 phút là bao nhiêu? Giải: Giả sử 1 biến cố là 1 người đến quầy.
Gọi T là thời gian giữa 2 khách hàng liên tiếp đến quầy.
Trung bình có 15 khách hàng đến trong 1 giờ, do đó
$\lambda = 15, x = 3pht = 0,05gi?$
$P(T < 0.05) = 1 - e^{-\Lambda x} = 1 - e^{-15.0.05} = 0.5276$ Đây là ví dụ về tính không nhớ của phân phối mũ. Ta nói BNN không âm X có phân phối mũ không nhớ nếu:

$$\forall s, t \geq 0, P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$$

Phân phối chuẩn

Định nghĩa:

BNN liên tục X có phân bố chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$, ký hiệu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nếu hàm mật độ có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi}} e^{\dfrac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ; \forall x \in R$$

Phân phối chuẩn thường được thấy trong các bài toán về sai số gặp phải khi đo đạc các đại lượng vật lý, thiên văn.

Phân phối chuẩn

Tính chất

Hàm phân phối: $F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

Kỳ vọng: $E(X) = \mu$

Phương sai: $D(X) = E(X^2) - [E(X)]?^2 = \sigma^2$

Phân phối chuẩn tắc

Định nghĩa

Phân phối Gauss khi $\mu = 0; \sigma = 1$được gọi là phân phối chuẩn tắc, ký hiệu:$\sim N(0,1)$

Hàm mật độ: $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} e^{\dfrac{-x^2}{2}}; \forall x \in R$

Hàm phân phối: $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \phi(t)dt = \dfrac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ (hàm Laplace)

1) $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1; \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
2) Nếu $X \sim N(0,1)$ thì
$\forall a > 0, P\{|X| < a\} = 2\Phi(a) - 1 = 2(1 - \Phi(a))$

Phân phối chuẩn tắc

Xét BNN $X \sim N(0,1)$. Ta chuẩn hóa X bằng cách đặt $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ta có hàm mật độ của Y là:

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} e^{\dfrac{-y^2}{2}} \; \forall y \in R$$

Ký hiệu: $Y \sim N(0,1)$ công thức:

$P(X < b) = 0.5 + \Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)$;

$P(X > a) = 0.5 - \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$P(a < X < b) = \Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Phân phối chuẩn tắc

QUY TẮC 2σ VÀ 3σ

$P(|X-\mu|<2\sigma)=2\Phi(2)-1=0.9544$

$P(|X-\mu|<3\sigma)=2\Phi(3)-1=0.9973$

Hai công thức trên là cơ sở của qui tắc hai xích ma và ba xích ma: Nếu $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ thì có đến 95,44% giá trị của X nằm trong khoảng $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ và hầu như toàn bộ giá trị của X nằm trong khoảng $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$

Phân phối chuẩn tắc

Ví dụ 1: Cho $X \sim N(8;5)$. Tìm P(X<8.6).

Giải

$$P(X < 8.6) = 0.5 + \Phi\left(\frac{8.6-8}{5}\right) = 0.5 + 0.0478 = 0.5478$$

Ví dụ 2: Chiều cao người Việt Nam có phân phối: $H \sim N(1.6; 0.01)$. Tính tỷ lệ người Việt có chiều cao trong khoảng 1,5m – 1,7m. Giải: Gọi X là chiều cao người Việt

$$P(1.5 < X < 1.7) = \Phi\left(\frac{1.7-1.6}{0.01}\right) - \Phi\left(\frac{1.5-1.6}{0.01}\right) =$$

$$\Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1) = 0.6827$$

PP NHỊ THỨC VÀ PP CHUẨN

ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM Trong một số lớn phép thử Bernoulli thì chuẩn hóa của BNN chỉ số lần thành công có phân phối nhị thức sẽ có PP xấp xỉ chuẩn:

$$\frac{X - np}{\sqrt[2]{npq}} \sim N(0.1)$$

Công thức xấp xỉ:

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt[2]{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt[2]{npq}}\right)$$

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt[2]{npq}\sqrt[2]{x\pi}} E^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

Luật số lớn

Để xác định xác suất p của sự kiện A trong một phép thử nào đó, người ta lặp lại phép thử một số lớn lần độc lập với nhau sau đó lấy tần số xấp xỉ cho p.

$$\lim_{n \to \infty} P[|f_n - p| \leq \epsilon] = 1$$

Luật số lớn chỉ ra rằng, khi ta chọn ngẫu nhiên các giá trị (mẫu thử) trong một dãy các giá trị (quần thể), kích thước dãy mẫu thử càng lớn thì các đặc trưng thống kê (trung bình, phương sai,...) của mẫu thử càng "gần" với các đặc trưng thống kê của quần thể.

Phân phối chi-bình phương

Định nghĩa

Cho $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì $Y = X^2$ có phân phối "chi bình phương"
Ký hiệu: $Y \sim \chi^2(n)$
BNN X có phân phối chi bình phương với n bậc tự do $(n \in N^*)$ nếu X có hàm mật độ được xác định trên R:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

Γ là hàm Gamma. Ký hiệu: $X \sim \chi^2(n)$

PP χ^2

Hàm Gamma

$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt.$

$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2^n} \sqrt[2]{\pi}$

$\Gamma(k) = (k-1)!$ nếu p=k là số nguyên chẵn

$\Gamma(1) = 1; \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt[2]{\pi}; \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt[2]{\pi}$

PP χ^2

Phân loại χ^2:

Người ta phân biệt hai loại phân phối "chi bình phương" như sau:
-Phân phối χ^2 trung tâm khi$\mu = 0$
- Phân phối χ^2 không trung tâm khi $\mu \neq 0$

PP χ^2

χ^2 trung tâm

Hàm mật độ: $f_y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}; y \geq 0.$

Hàm phân phối xác suất:

$$F_y(y) = \int_0^y f_y(u)du = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi}} \int_0^y \frac{e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}}{\sqrt[2]{u}} du$$

PP χ^2

Nếu $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ trong đó $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = \overline{1, n}$ thì Y là phân phối χ^2 vói n bậc tự do với:

Hàm mật độ:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sigma^n 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, y \geq 0$$

Hàm phân phối của Y:

$$F_y(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma^n 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}} du; y \geq 0$$

PP χ^2

Nếu $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ trong đó $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = \overline{1, n}; \mu \neq 0$ thì Y thuộc phân phối χ^2 không trung tâm với n bậc tự do với:
Hàm mật độ:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sigma \sqrt[2]{2\pi y}} e^{-\dfrac{y+\mu^2}{2\sigma^2}} \cosh\left[\frac{\mu \sqrt[2]{y}}{\sigma^2}\right], y \geq 0$$

Hàm phân phối:

$$F_y(y) = \int_0^y \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{u}{s^2}\right)^{\dfrac{n-2}{4}} e^{-\dfrac{s^2+\mu}{2\sigma^2}} I_{\frac{n}{2}-1}\left(\sqrt[2]{u}\frac{s}{\sigma^2}\right) du$$

PP χ^2

$s^2 = \sum_{k=0}^{n} \mu_i^2$

$I_\alpha(x)$ là hàm Bessel cấp α được xác định bởi:

$$I_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2k}}{k!\Gamma(\alpha+k+1)}; x \geq 0$$

PP χ^2

Các tham số đặc trưng

$X^2 \sim \chi^2(n)$

Kỳ vọng $E(X^2) = n$

Phương sai $D(X^2) = 2n$

PP χ^2

Đồ thị hàm mật độ

PP χ^2

Tính chất

-Phân phối chi bình phương là phân phối lệch về bên trái, khi bậc tự do tăng dần thì phân phối chi bình phương tiến gần đến phân phối chuẩn N(k,2k).
-Tổng các biến có phân phối chi bình phương cũng có phân phối chi bình phương với số bậc tự do bằng tổng các bậc tự do.

PP χ^2 VÀ PP CHUẨN

-Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì $Y = X^2$ có PP chi bình phương$\rightarrow$ PP chi bình phương xuất phát từ PP chuẩn.
-Trong mục ii, 2.5.6 trang 84 (Hàm của biến ngẫu nhiên)
Trường hợp $Y = ax^2 + b, a > 0$, phân phối chi bình phương chính là trường hợp a=1, b=0.

Đồ thị

Phân phối Student

Định nghĩa

Nếu t là BNN xác định bởi:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s}$$

trong đó:
$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ (trung bình mẫu)
$E(\bar{X}) = \mu$
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - (\bar{X}))^2$ (phương sai mẫu)
thì t thuộc phân phối Student.

Tính chất Phân phối Student

Hàm mật độ:
-biểu diễn qua hàm Gamma:

$$f_t(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt[2]{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < t < +\infty$$

-biểu diễn qua hàm Beta:

$$f_t(t) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2};\frac{1}{2}\right)\sqrt[2]{n}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < t < +\infty$$

với $B(\alpha,\beta) = \int^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$

Phân phối Student

Định nghĩa khác

Giả sử U là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn hóa và V là đại lượng ngẫu nhiên độc lập với U có phân phối chi bình phương với n bậc tự do. Khi đó đại lượng ngẫu nhiên:

$$T = \frac{U\sqrt[2]{n}}{\sqrt[2]{V}}$$

được gọi là có phân phối Student với n bậc tự do.
Ký hiệu: $T \sim T(n)$

Phân phối Student

Các tham số đặc trưng

Cho $T \sim T(n)$ thì: Kỳ vọng E(T)=0

Phương sai: $D(T) = \dfrac{n}{n-2}$

Phân phối Student

Tính chất: -Phân phối Student có cùng dạng và tính đối xứng như phân phối chuẩn nhưng nó phản ánh tính biến đổi của phân phối sâu sắc hơn.
-Khi bậc tự do n tăng lên (n>30) thì phân phối Student tiến nhanh về phân phối chuẩn. Do đó khi n>30 ta có thể dùng phân phối chuẩn thay cho phân phối Student.

Phân phối Student

Theo mục i) phần 2.5.6 trang 84 (Hàm của biến ngẫu nhiên)
Trường hợp g là hàm tuyến tính: Y=aX+b với a,b là hằng số.

Trong phân phối Student, $a = \frac{1}{s}, b = \frac{-\mu}{s}$ với $t = \frac{(\bar{X}) - \mu}{s}$

đồ thị

đồ thị

Bài 28

Một máy tiện sản xuất vòng đệm với đường kính trong của vòng đệm có phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 0.373cm$ và $\sigma = 0.002cm$. Nếu có yêu cầu đặc biệt rằng đường kính trong của vòng đệm là 0.375cm với sai số không quá 0.004cm thì có bao nhiêu phần trăm sản phẩm vòng đệm bị loại.

Bài 28

-Gọi X là BNN biểu diễn đường kính bên trong của vòng đệm.
Theo giả thiết:
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ với $\mu = 0.373cm; \sigma = 0.002cm$
Nếu $X \in [0.375 - 0.004; 0.375 + 0.004]$ thì vòng đệm được chấp nhận $\rightarrow$ sp được nhận nếu X > 0.379 hoặc X < 0.371.

$$P(X > 0.379) + P(X < 0.371) =$$
$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{0.379 - 0.373}{0.002}\right) +$$
$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0.371 - 0.373}{0.002}\right) = P(Z > 3) + P(Z < -1) =$$
$$0.001 + (1 - 0.841) = 0.16$$

Vậy có 16% sản phẩm bị loại.

Bài 29

Giả sử chiều cao của sinh viên Đại học Sư phạm tuân theo luật phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$. Nếu có 13.75% sinh viên cao hơn 178cm và 8.08% sinh viên thấp hơn 155cm. Hãy cho biết chiều cao trung bình của sinh viên và độ lệch chuẩn.

Bài 29

Giả thiết $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, trong đó X là chiều cao của sinh viên.
$P(X > 178) = 0.1357$
$P(X < 155) = 0.0808$
Vậy sinh viên có chiều cao trung bình là 167.88cm và độ lệch chuẩn $\sigma = 9.2$

Bài tập 19

Cách 1: bấm máy tính

a. $\int\limits_{-100}^{0} \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ (dựa vào tính chất cũng biết là 0.5 :v)

b.c. tương tự lưu ý là $\sqrt{2\pi}$ tính sau để máy tính ra kết quả nhanh.

Cách 2: tra bảng

b. $= P(0 \leq X \leq 1)$

c. $= 0.5 + P(0 \leq X \leq 2.54)$

Bài tập 25

Cách 1:

$$= \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \int_{778}^{834} e^{-\frac{(x-800)^2}{2.40^2}} dx$$

Cách 2 tra bảng cần đưa về phân phối chuẩn tắc $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$a = 778 \Rightarrow t_1 = \frac{778-800}{40} = -0.55 \Rightarrow 0.20884$$

$$b = 834 \Rightarrow t_2 = \frac{834-800}{40} = 0.85 \Rightarrow 0.30344$$

cộng lại ra kết quả.

Bài tập 26

$$5\% = P(X \geq 300) = 0.5 - P(0 \leq X \leq 300) \rightarrow P = 0.45 \rightarrow$$
$$z = 0.164 = \frac{300 - \mu}{6}$$
$$\rightarrow \mu = 290$$

Bài tập 27

a. $\int_{0}^{5300}$

b. tìm k số thực phẩm cần

$0.1 = P(X \geq k) = 0.5 - P(0 \leq X \leq k) \to P = 0.4 \Rightarrow 1.29 = \dfrac{k - 5000}{300} \Rightarrow k = 5387$