

1. Energieverlust kosmischer Myonen in Eisen

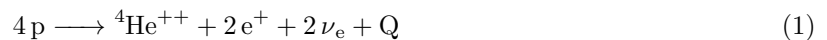
Betrachten Sie ein kosmisches Myon der Energie $E = 3 \text{ GeV}$, welches durch eine 5 cm dicke Eisenplatte ($Z = 26$, $A = 55,85$, $\rho = 7,874 \text{ g/cm}^3$) fliegt. Berechnen Sie den Energieverlust des Myons im Eisen. Warum können Sie hierfür den Energieverlust als eine Konstante betrachten, anstelle über die vom Myon zurückgelegte Strecke zu integrieren?

Hinweis: Vernachlässigen Sie die Dichteeffektkorrektur und nehmen Sie für das Ionisationspotential $I \approx Z \cdot 10 \text{ eV}$ an.

$$\begin{aligned}
 -\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle &= K \cdot z^2 \cdot \rho \frac{Z}{A} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \cdot T_{max}}{I^2} - \beta^2 \right] \\
 E &= \gamma m c^2 \quad \wedge \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \quad \wedge \quad K = \frac{4\pi N_a \alpha (\hbar c)^2}{m_e c^2} \\
 \Rightarrow \gamma &= \frac{3 \text{ GeV}}{m_\mu c^2} = 28,39 \\
 \beta &= 0,999 \approx 1 \\
 T_{max} &= \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \stackrel{M \gg m_e}{\approx} 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 = 823,7 \text{ MeV} \\
 K &= 6,74 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J kg}^3}{\text{m}} = 4,20 \cdot 10^{-3} \frac{\text{MeV kg}^3}{\text{m}} \\
 -\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle &= 2,151 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \\
 dE (5 \text{ cm}) &= 10,755 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

2. Solare Neutrinos

In der Präsenzübung hatten Sie die Energieerzeugung der Sonne mittels thermonuklearer Fusion betrachtet. Hierbei werden in der sogenannten pp -Kette vier Protonen in mehreren Zwischenschritten zu einem ${}^4\text{He}$ -Kern fusioniert. Die Gesamtreaktion ergibt sich dabei zu:



mit der bei der Fusion freiwerdenden Gesamtenergie Q .

- (a) Welche Lebensdauer erhält man für die Sonne unter der Annahme, dass alle in der Sonne vorhandenen Protonen in der pp -Kette zu He umgewandelt werden? Verwenden Sie hierfür den in der Präsenzaufgabe berechneten Neutrinofluss auf der Erde (d.h. in $1 \text{ ua} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ Abstand von der Sonne) von $\Phi_{pp} = 6,89 \cdot 10^{14} / (\text{m}^2 \text{ s})$.

$$\begin{aligned}
 m_{Sun} &= 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\
 \dot{N}_\nu &= \Phi_{pp} \cdot A = \Phi_{pp} \cdot 4\pi \cdot (1 \text{ ua})^2 = 1,948 \cdot 10^{38} \frac{1}{\text{s}} \\
 \dot{N}_p &= 2 \cdot \dot{N}_\nu = 3,896 \cdot 10^{38} \frac{1}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Der Wasserstoffgehalt der Sonne beträgt momentan etwa 75% .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow N_p &= \frac{75\% \cdot m_{Sun}}{m_p} = 8,971 \cdot 10^{56} \\
 T &= \frac{N_p}{\dot{N}_p} = 7,3 \cdot 10^{10} \text{ a}
 \end{aligned}$$

In einem Nebenzweig des pp -Zyklus werden durch Einfang eines Elektrons an ${}^7\text{Be}$ in der Reaktion



mono-energetische Neutrinos mit einer Energie von $E_{\text{Be}} = 862 \text{ keV}$ erzeugt, die in unterirdischen Detektoren über Neutrino-Elektron-Streuung nachgewiesen werden können. Im sogenannten *Borexino*-Experiment dient z.B. ein hochreiner Flüssigszintillator (Pseudocumol, C_9H_{12}) von 100 t Masse als Elektronentarget, in dem die Rückstoßelektronen ein Lichtsignal erzeugen.

- (b) Erläutern Sie qualitativ, warum das in Reaktion (2) emittierte Neutrino mono-energetisch ist. Sie können dabei eine mögliche Anregung des ${}^7\text{Li}$ Kerns vernachlässigen, da er in $89,48\%$ der Zerfälle

im Grundzustand erzeugt wird.

Die durch die Kernumwandlung frei werdende Energie (Bindungsenergie des eingefangenen Elektrons) wird als kinetische Energie an das Neutrino abgegeben. Verbleibt der durch die Umwandlung entstandene Tochterkern im Grundzustand, so geht die gesamte Energie an das Neutrino.

- (c) Berechnen Sie die Anzahl der $\nu_e - e^-$ -Streuereignisse im Detektor pro Tag. Gesehen Sie dabei von einem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\nu_e - e^-} = 7,93 \cdot 10^{-21}$ b und einem Neutrinofluss $\Phi_{Be} = 3,3 \cdot 10^{13}/(\text{m}^2 \text{s})$ auf der Erde aus.

$$N_e = \frac{m_{\text{Szintillator}}}{N_A} \cdot \underbrace{9 \cdot 6 \cdot 12}_{\text{Anzahl der } e^- \text{ pro Molekül}} = 3,251 \cdot 10^{32}$$

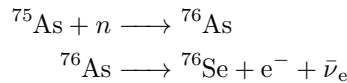
$$\dot{N} = N_e \cdot \Phi_{Be} \cdot \sigma_{\nu_e - e^-} = 735 \frac{1}{\text{d}}$$

3. Spurenelementanalyse (Teil einer Staatsexamensaufgabe)

Spritzmittel, die im Weinbau verwendet werden, können Arsen enthalten. Um festzustellen, wie viel davon in den Wein gerät, werde eine Weinprobe mit der Masse 2,00 g für 16 min in einem Reaktor mit einer Neutronenflussdichte $\Phi = 1,0 \cdot 10^{15}/(\text{s cm}^2)$ bestrahlt. Dabei wird natürliches ^{75}As in ein radioaktives As-Isotop mit $t_{1/2} = 26,5$ h umgewandelt (Aktivierung). Der Wirkungsquerschnitt für diesen Prozess beträgt $\sigma = 5,4 \cdot 10^{-24}/\text{cm}^2$.

- (a) Geben Sie die Reaktionsgleichung für den Neutroneneinfang an. Welcher Zerfallsprozess ist für das radioaktive As-Isotop zu erwarten? Geben Sie die Zerfallsgleichung an.

Das Arsen besitzt durch die Bestrahlung einen Neutronen-Überschuss und wird somit wahrscheinlich einen β^- -Zerfall erfahren.



- (b) Berechnen Sie die Produktionsrate des radioaktiven As-Isotops, wenn die Probe zu 10^{-5} Gewichtsteilen aus Arsen besteht.

$$\dot{N} = N_{\text{As}} \cdot \Phi \cdot \sigma = \frac{2,00 \text{ g} \cdot 10^{-5}}{\frac{75 \text{ g/mol}}{N_A}} \cdot \Phi \cdot \sigma = 8,67 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{s}}$$

- (c) Wie groß ist die Anzahl N_{akt} der As-Atome, welche im gesamten Bestrahlungsprozess aktiviert werden? Diskutieren Sie, inwiefern N_{akt} exakt der am Ende der Bestrahlung vorhandenen Anzahl N_0 der radioaktiven As-Atome entspricht.

$$N_{\text{akt}} = \dot{N}_{\text{As}} \cdot t_{\text{akt}} = 8,3 \cdot 10^{11}$$

4. Thermische Neutronen und Uranspaltung

- (a) Geben Sie die Rolle des Neutrons bei der Spaltung eines Urankerns ^{235}U an. Begründen Sie, warum der Wirkungsquerschnitt mit abnehmender Neutronenenergie zunimmt.

Durch thermische — d. h. vergleichsweise langsame — Neutronen sind meistens nur Isotope mit ungerader Neutronenzahl gut spaltbar. Nur diese Atomkerne gewinnen durch die Aufnahme eines Neutrons Paarenergie hinzu.

- (b) In einem Kernspaltungsreaktor wird als Moderationsmaterial zur Abbremsung der Neutronen auf thermische Energie von $E_{n,\text{therm}} \sim 0,025$ eV oftmals H_2O verwendet. Betrachten Sie ein Neutron ($m_n = 939,6 \text{ MeV}/c_0^2$) mit der kinetischen Energie $E_{\text{kin},n} = 1,74 \text{ MeV}$ und bestimmen Sie seine kinetische Energie

Impulserhaltung

$$m_n \cdot v_n = m_n \cdot v'_n + m_k \cdot v'_k$$

$$\Rightarrow v'_k = \frac{m_n(v_n - v'_n)}{m_k}$$

Energieerhaltung

$$\begin{aligned}
\frac{m_n}{2} v_n^2 &= \frac{m_n}{2} v_n'^2 + \frac{m_k}{2} v_k'^2 \\
\Rightarrow \frac{m_n}{2} (v_n^2 - v_n'^2) &= \frac{m_k}{2} v_k'^2 \\
\frac{m_n}{2} (v_n^2 - v_n'^2) &= \frac{m_k}{2} \left(\frac{m_n(v_n - v_n')}{m_k} \right)^2 \\
\frac{m_n}{2} (v_n^2 - v_n'^2) &= \frac{m_n^2}{2m_k} (v_n - v_n')^2 \\
\Leftrightarrow \frac{m_k}{m_n} (v_n + v_n') &= (v_n - v_n') \\
\Leftrightarrow v_n' \left(1 + \frac{m_k}{m_n} \right) &= v_n \left(1 - \frac{m_k}{m_n} \right) \\
\Leftrightarrow v_n' (m_k + m_n) &= v_n (m_n - m_k) \\
\Leftrightarrow v_n' &= v_n \frac{m_n - m_k}{m_n + m_k}
\end{aligned}$$

Kinetische Energie

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin},n} &= \frac{m_n}{2} v_n^2 \\
\Rightarrow v_n &= \sqrt{\frac{2E_{\text{kin},n}}{m_n}} = 1,826 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

i. nach einem zentralen Stoß mit einem ruhenden H-Kern ($m_p = 938 \text{ MeV}/c_0^2$), und

$$\begin{aligned}
v_n' &= 1,556 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
\Rightarrow E'_{\text{kin},n} &= 1,265 \text{ eV}
\end{aligned}$$

ii. nach einem zentralen Stoß mit einem ruhenden O-Kern ($m_O = 14900 \text{ MeV}/c_0^2$).

$$\begin{aligned}
v_n' &= -1,609 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
\Rightarrow E'_{\text{kin},n} &= 1,353 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

(c) Unter Berücksichtigung nichtzentraler Stöße des Neutrons mit ruhenden H-Kernen gilt im Mittel für jeden Stoß: $E_{n,\text{nacher}} = 0,368 \cdot E_{n,\text{vorher}}$. Bestimmen Sie die Anzahl N solcher Stöße, die zur Abbremsung eines Neutrons von $E_n = 1,74 \text{ MeV}$ auf thermische Energie notwendig ist.

$$\begin{aligned}
E_{\text{therm}} &\geq E_n \cdot 0,368^n \\
\Rightarrow \frac{E_{\text{therm}}}{E_n} &\geq 0,368^n \\
\ln\left(\frac{E_{\text{therm}}}{E_n}\right) &\geq n \cdot \ln(0,368) \\
n &\geq \frac{\ln\left(\frac{0,025 \text{ eV}}{1,74 \text{ MeV}}\right)}{\ln(0,368)} > 18,06 \\
n &\geq 19
\end{aligned}$$