Drie technieken voor visuele cryptografie

Luc Van den Broeck

30 december 2016

Samenvatting

In onze computermaatschappij is cryptografie een populair thema. Het onderwerp cryptografie maakt deel uit van de wiskundige informatica. De meeste cryptografische systemen zijn gebaseerd op stellingen uit de getaltheorie. Versleuteling en ontsleutelingen van berichten vragen vaak intensief computerrekenwerk.

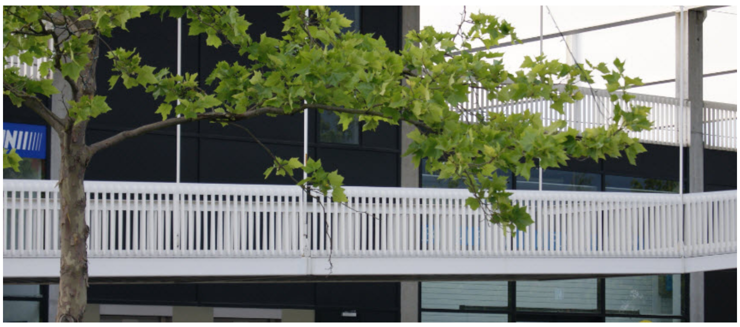
Bij *visuele cryptografie* wordt het rekenwerk echter tot een minimum beperkt. Ook hoeft de ontwerper van deze geheimcodes bijna geen gebruik te maken van wiskundige stellingen en eigenschappen. De ontsleuteling van een boodschap kan zelfs gebeuren zonder digitale hulpmiddelen: schuif twee transparanten met onherkenbare afbeeldingen over elkaar en kijk doorheen deze transparanten naar de ontsleutelde boodschap.

In dit verslag worden drie technieken voor visuele cryptografie toegelicht. Voor de eerste techniek is er wel wat wiskundige achtergrondkennis nodig. De tweede en derde techniek zijn vlot uitvoerbaar zonder deze achtergrond.

1 Eerste techniek: geheimschrift met lijntjes

1.1 Wat is het moiré-effect?

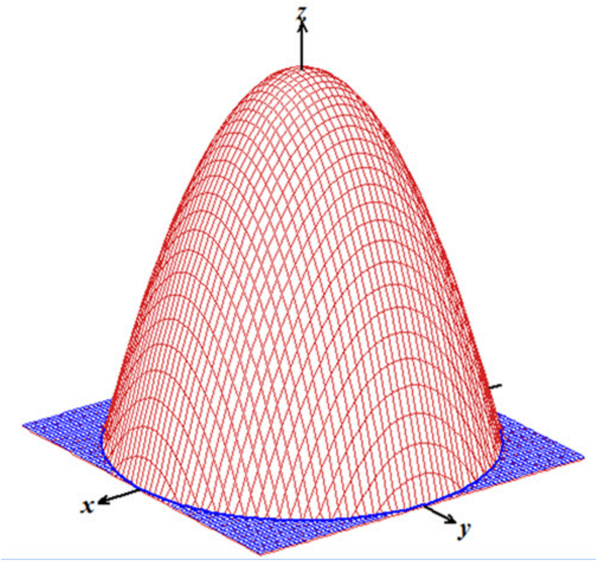
Moiré of interferentie is een complex begrip dat ontleend is aan de optica. Eenvoudige versies van interferentie komen ook in het dagelijkse leven voor. Overal waar je bijvoorbeeld door twee evenwijdige rijen hekken heen kijkt, zal je zones vinden waar de spijlen elkaar optisch overlappen en zones waar de spijlen naast elkaar lijken te liggen.



Figuur 1: Moiré-effect bij een dubbele afrastering

Daar waar de spijlen van de twee rijen elkaar overdekken, lijkt er een kleinere dichtheid van spijlen te zijn. Je kunt er door de afrastering heen kijken. Op plaatsen waar de spijlen van de voorste en van de achterste rij elkaar afwisselen, zie je een verdichting van de verticale lijnen (zie figuur 1). Loop je op een bepaalde afstand parallel met de afrastering dan lopen de open en de dichte zones in een merkwaardige golfbeweging met je mee.

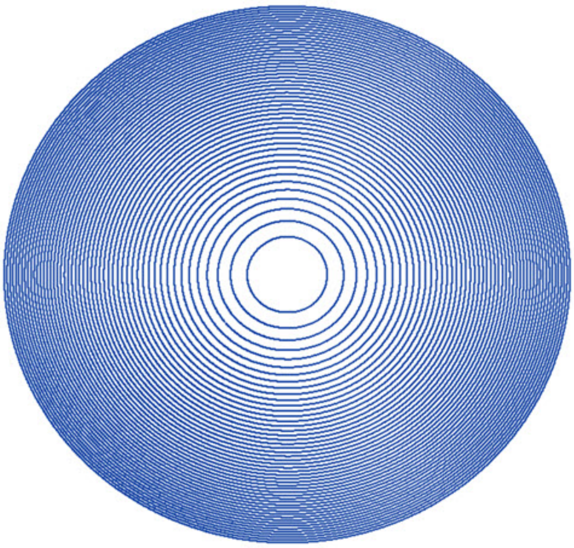
Het toevallige moiré-effect dat we in een afrastering zien, kunnen we ook wiskundig nabootsen met niveaulijnenkaarten. Niveaulijnenkaarten zijn vergelijkbaar met stafkaarten met hoogtelijnen. Voor een parabolische berg (zie figuur 2) bestaat de niveaulijnenkaart uit concentrische cirkels (zie figuur 3). Aan de randen van deze kaart zie je ook nog vagere, kleinere cirkeltjes. Sla hier geen acht op: dit ongewilde effect wordt veroorzaakt door de pixels in het computerscherm.



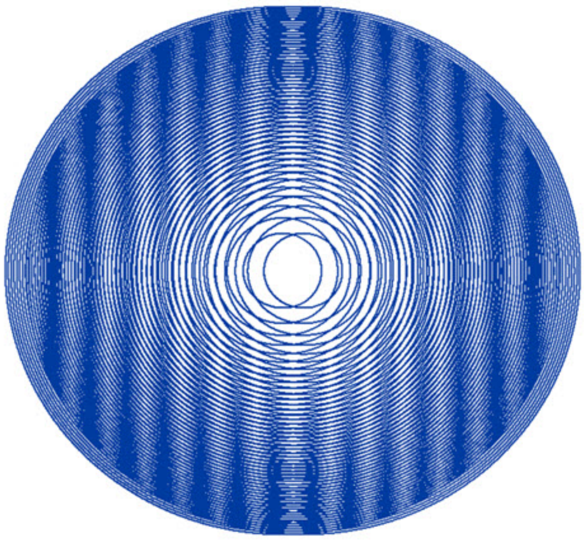
Figuur 2: Een parabolische berg

Als je de niveaulijnenkaart van de parabolische berg twee keer op een transparant kopieert dan kan je een wonderbaarlijk schouwspel zien door de twee transparanten slordig over elkaar te leggen. Er ontstaan evenwijdige glimmende zones. Dit optische effect (zie figuur 4) wordt bestempeld als het moiré-effect.

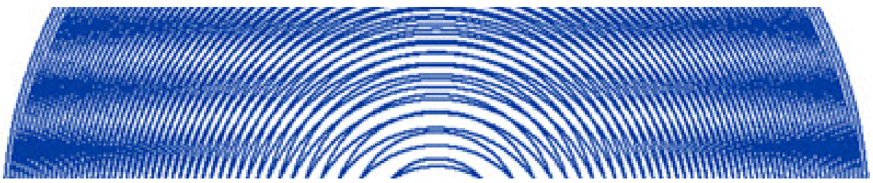
Je vraagt je wellicht af of deze glimmende glanslijnen echt zijn of eerder gezichtsbedrog. Het antwoord is eenvoudig: ze zijn echt. Door in te zoomen op de glansvlekken zie je hoe ze ontstaan. Omdat we het overlappende lijnenpatroon slechts over een kleine afstand hebben verschoven, snijden de niveaulijnen van de twee patronen elkaar onderling onder een kleine hoek. Dit betekent dat de niveaulijnen van beide kaarten bij elke onderlinge snijding geruime tijd samenvallen. Hierdoor ontstaat een zone met een zwakke lijnendichtheid (zie figuur 5). In deze zone schijnt het witte blad stralend door het rasterwerk heen. Vandaar dus het glimmende karakter.



Figuur 3: De niveaulijnenkaart van een parabolische berg



Figuur 4: Moiré-effect in overlappende lijnenpatronen



Figuur 5: Het ontstaan van de glimmende zones

1.2 Moiré en geheime boodschappen

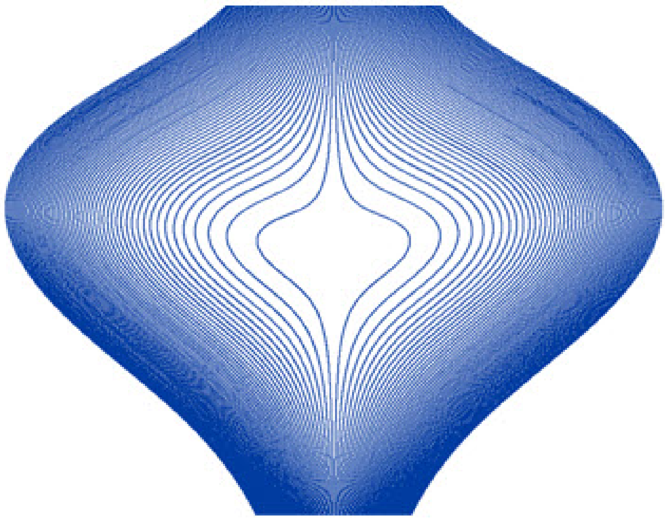
Meestal is het niet interessant om de glanslijnen van overlappende lijnenpatronen als geheime boodschap door te geven. Wellicht is niemand er op uit om een serie evenwijdige rechten als geheime boodschap door te zenden.

Een eerste voorbeeld

Het wordt echter spannender als de geheime boodschap van erotische aard is. Je zou bijvoorbeeld klandestien een hartje naar je geliefde kunnen zenden. Om dit onopvallend te doen verzin je een niveaulijnenkaart, bijvoorbeeld eentje met niveaulijnen van de vorm:

$$\frac{1}{3}x^3 + x \cdot y^2 - \frac{3}{5}y \cdot \sqrt[3]{x^5} = c. \tag{1}$$

Hierbij hoort bij elke waarde van c een welbepaalde niveaulijn. Je kan bijvoorbeeld c een rekenkundige rij laten doorlopen. De niveaulijnenkaart die zo ontstaat is de gecodeerde boodschap. Ze verraadt geen enkele amoureuze intentie (zie figuur 6).

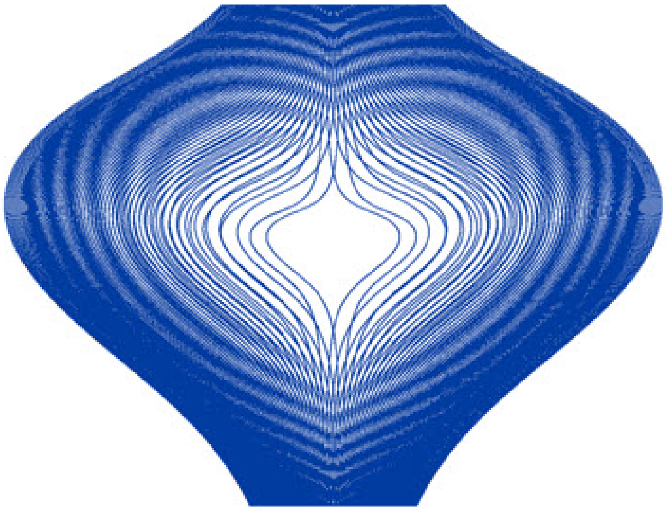


Figuur 6: Het gecodeerde bericht

Wanneer de ontvanger deze boodschap kopieert op twee identieke transparanten en deze slordig over elkaar legt, merkt hij of zij meteen de draagwijdte van de boodschap. Er ontstaan concentrisch kloppende hartjes (zie figuur 7) die wiskundig omschreven worden door de formule:

$$x^2 + y^2 - y \cdot \sqrt[3]{x^2} = c. \tag{2}$$

Elke waarde van c geeft een van de concentrische harten op de figuur.



Figuur 7: Het gedecodeerde bericht

Techniek

Rest ons de vraag op te lossen hoe de formules (1) en (2) tot stand zijn gekomen.

Het linkerlid van (2) kan je op het internet opzoeken. Er zijn tal van algebraïsche vergelijkingen van hartjes te vinden. Het linkerlid van (1) kan je afleiden uit het linkerlid van (2) door een integraalberekening naar de onbekende x uit te voeren. In het zesde jaar van het secundair onderwijs leer je integralen te berekenen. Beheers je deze vaardigheid (nog) niet, dan kan je integralen ook laten berekenen door softwarepakketten, bijvoorbeeld door Wolfram Alpha, Derive, Maple, Mathematica ...

Een tweede voorbeeld

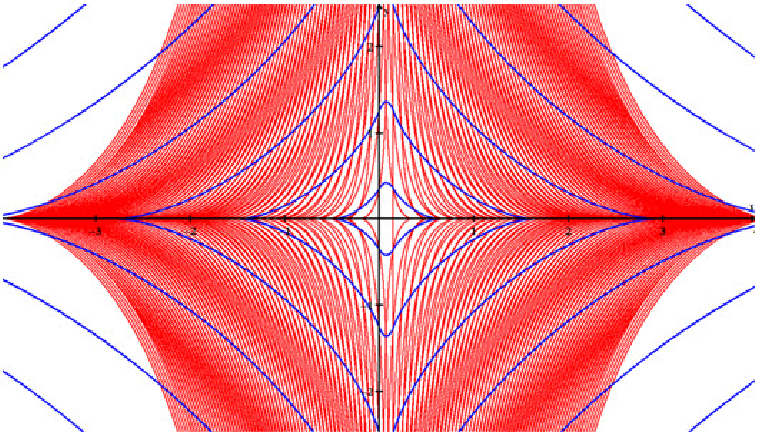
We passen deze techniek nog een keer toe. Stel dat je in een geheime boodschap een vierpuntige ster wil verwerken. Op het internet vind je de vierpuntige ster terug onder de naam *asteroïde*.
De vergelijking van een hele reeks concentrische asteroïden is:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c. \tag{3}$$

Als we het linkerlid van deze vergelijking, bijvoorbeeld met Wolfram Alpha, integreren naar de onbekende x dan vinden we:

$$\frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} + x \cdot y^{\frac{2}{3}} = c. \tag{4}$$

Door de parameter c in formule (4) verschillende waarden te geven vinden we een niveaulijnenkaart die kan dienen als geheime boodschap. Drukken we deze kaart twee keer af op transparant en leggen we de transparanten lichtjes in de x-richting verschoven over elkaar dan verschijnen de asteroïden opnieuw. Het bericht is dan gedecodeerd (zie figuur 8).



Figuur 8: Gedecodeerde vierpuntige sterren

2 Tweede techniek: geheimschrift met blokjes

2.1 Een geschikte zwartwitfoto zoeken

Voor het tweede deel van dit project heb je een geschikte zwartwitfoto nodig. Een foto met teveel grijswaarden bemoeilijkt het project. De foto moet immers omgezet worden in een binaire tabel met de getallen 1 (voor witte pixels) en 0 (voor zwarte pixels). Voor dit doel worden best foto's gebruikt met massieve zwartpartijen bovenop een sneeuwwitte achtergrond. De helderheid van elke pixel moet dus extreem zijn (0 of 1) zonder grijswaarden tussenin.

Figuur 9: Twee silhouetfoto's

De makkelijkste manier om zulke foto's te bemachtigen is door op de zoektermen silhouet of silhouette te googelen. Je vindt dan een grote collectie aan personen, dieren, gebruiksvoorwerpen en andere merkwaardige objecten (zie figuur 9). Creatieve leerlingen kunnen zelf een sterke tegenlichtfoto maken waarvan ze de achtergrond transparant maken (zie figuur 10).

Figuur 10: Een tegenlichtfoto uit Rio

De gekozen foto moet verkleind worden naar een formaat waarbij zowel de breedte en de hoogte tussen de 100 en de 150 pixels bevat. Je kiest zelf met welk programma je dit doet. Je moet wel opletten dat je de lengte-breedteverhouding van de foto niet aanpast. De enige fout die je bij het herschalen kan maken, is het wijzigen van de *canvas size* in plaats van de *image size*. Verder zou deze operatie van een leien dakje moeten lopen.

2.2 Omzetten naar een binaire tabel

Het converteren van een afbeelding naar een binaire tabel is te moeilijk om dit zelf te programmeren. Daarvoor zoek je een applet op het internet. Zulke applets zijn echter schaars. Zoeken op Engelse zoektermen geeft meer succes dan zoeken op Nederlandse zoektermen.

Het resultaat van deze omzetting is een lijst met meer dan honderd lijnen waarop 'woorden' staan met meer dan honderd nullen en enen. In figuur 11 zie je een screenshot van een dergelijke omzetting. De output bestaat niet uit aparte cellen met nullen en enen die je rechtstreeks in een rekenblad kan overhevelen. Als je goed naar de afbeelding kijkt, vind je onderaan een suggestie voor een geschikte website.

Wanneer je door deze tabel scrolt, merk je dat er al vlug meer dan 10000 nulletjes en eentje moeten verwerkt worden. Je kan dit makkelijk doen in Excel. Let op, je moet hiervoor wel een latere versie van Excel nemen. In oude versies kan je niet meer dan 256 kolommen naast elkaar zetten. In deze versies is het dus onmogelijk om twee stevige tekeningen (met een breedte van 150 tekens) naast elkaar te zetten.

2.3 Een blokjesfoto in Excel

Met knippen en plakken kan je de binaire tabel omzetten naar in Excel. Het vraagt nog wel wat programmeerwerk om de originele afbeelding opnieuw in je Excelsheet te kunnen zien.

Als je de gekopieerde tabel gewoon in Excel plakt, verschijnt ze in één kolom. De velden in deze kolom maak je best op als tekstvelden. Want als je kopieert naar getallenvelden zou het immers kunnen dat de getallen in wetenschappelijke

Figuur 11: Een tabel met nullen en enen

notatie gezet worden en dat hierdoor een groot deel van de informatie verloren gaat.

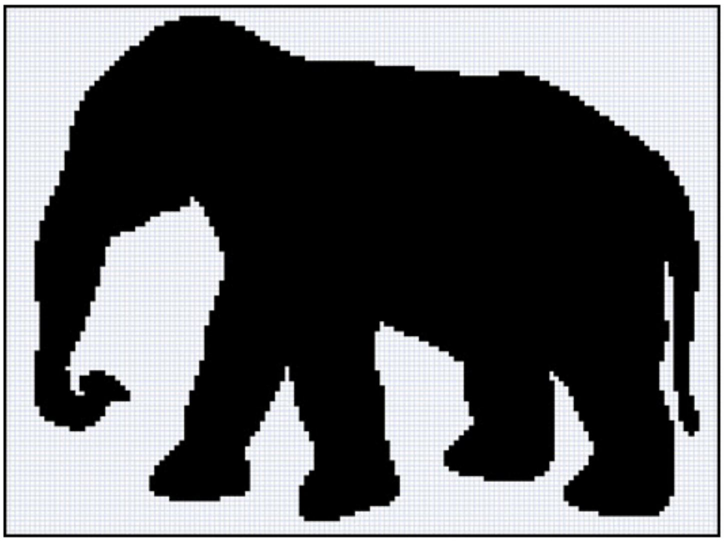
Vervolgens splits je de getallen uit de gekopieerde kolom uit in losse cijfers, die een rechthoekig rooster vullen. Hier komen wel wat formules aan te pas. Wie ervaring heeft in Excel, vindt de formules voor het opsplitsen van woorden gemakkelijk terug. Anderen zullen ze moeten opzoeken met de helpfunctie of zullen de hulplijn van de leerkracht moeten inschakelen.

Tot slot voegen we een likje verf aan de tabel toe. Met de optie 'voorwaardelijke opmaak' kan je alle velden met inhoud 0 een zwarte achtergrond- en letterkleur geven en die met inhoud 1 een witte achtergrond- en letterkleur. Als je geen fouten hebt gemaakt, verschijnt na de voorwaardelijke opmaak de originele figuur terug, zij het met een getrapte omtrekslijn (zie figuur 12).

Als de afbeelding teveel uitgerekt is in de ene of de andere richting moet je de breedte van de kolommen en de hoogte van de rijen in het Excelbestand aanpassen. Piepkleine vierkante cellen geven het mooiste beeld. Maar ze maken het nadien ook moeilijker om de twee transparanten correct over elkaar te schuiven.

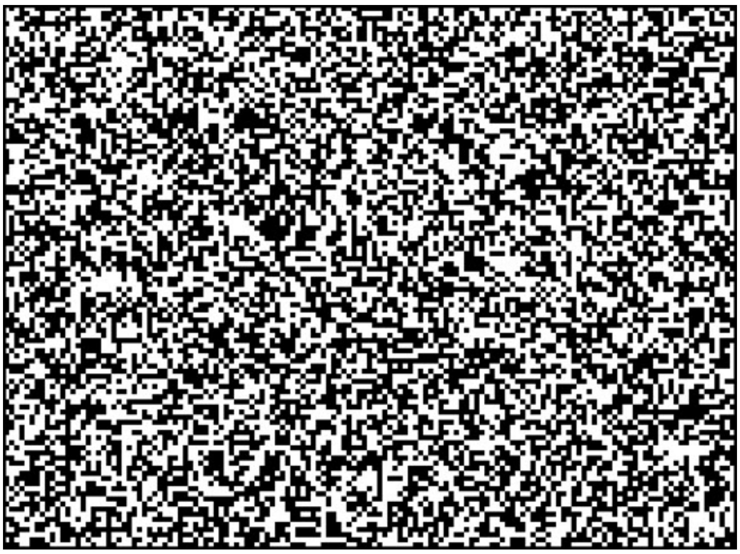
2.4 Versleutelen in Excel

Om de blokjesfoto te coderen hebben we een sleutel nodig. Met een sleutel bedoelen we een tabel die even groot is als de originele afbeelding en waarvan elke cel een toevallige keuze van nullen en enen bevat. De makkelijkste manier om een toevallige 0 of 1 te genereren, is een randomgetal in het interval [0, 1] te nemen en dit getal naar boven of beneden af te ronden tot 0 of 1. Je kunt deze sleutel op dezelfde manier voorwaardelijk inkleuren als de originele afbeelding. Het resultaat kan er uitzien zoals figuur 13. Als alles goed gaat, zie je geen



Figuur 12: Een olifant in blokjes

regelmaat in deze ruis aan zwarte hokjes.



Figuur 13: Een sleutel met blokjes

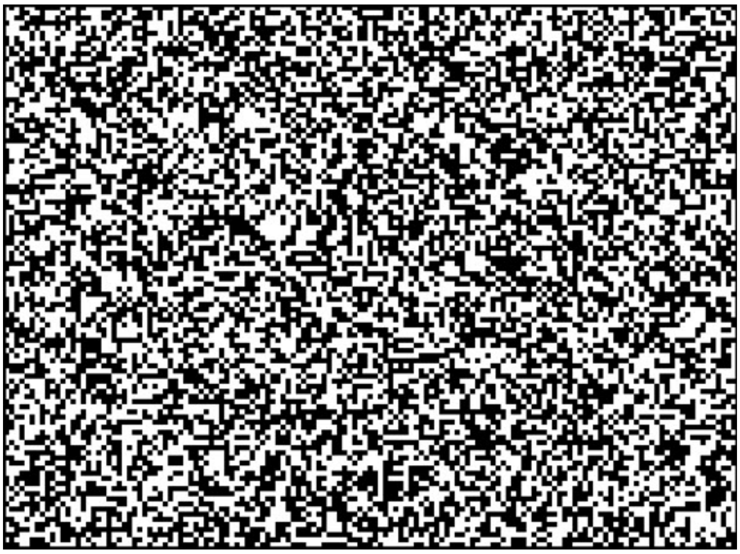
Techniek

Met welke techniek kan je de originele boodschap (de olifant) nu versleutelen? Wel, de regel is dat een vakje van de gecodeerde boodschap zwart gekleurd wordt als ofwel op de originele afbeelding een zwart vakje stond ofwel als er op de sleutel een zwart vakje stond (maar niet als beide vakjes samen zwart zijn).

In het geval dat de originele boodschap en de sleutel in kleur overeenkomen moet het vakje in de gecodeerde boodschap wit (of transparant) gekleurd worden. Op deze manier zal de originele boodschap terug te vinden zijn door de sleutel en de gecodeerde boodschap transparant over elkaar te leggen. Ga zelf na dat dit klopt.

Met de wiskundige formule $f(x, y) = 1 - \text{REST}(x + y, 2)$ lukt het om de bovenstaande bewerking in Excel te programmeren. De functie $\text{REST}(x+y, 2)$ staat hier voor de rest van de deling van $x + y$ door 2. Ga na dat $f(0, 0) = 1$, $f(0, 1) = 0$, $f(1, 0) = 0$ en $f(1, 1) = 1$. Formuleer nog even wat dit betekent voor de superpositie van de kleuren wit en zwart.

Op deze manier is het mogelijk om in Excel een versleuteld bericht te maken vanuit een originele afbeelding en een sleutel. Ook in de ruis van dit versleutelde bericht lijkt er geen patroon te zitten. De enige regelmaat die we kunnen opmerken is de vaststelling dat ongeveer de helft van de blokjes zwart is ingekleurd (zie figuur 14).



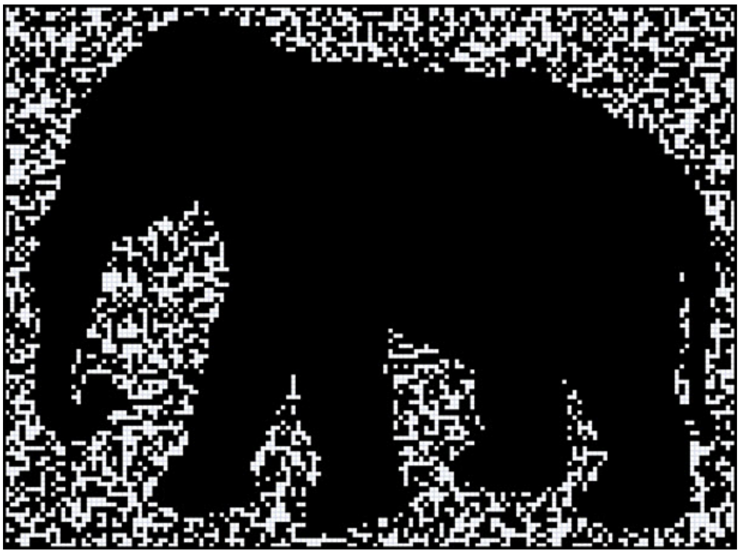
Figuur 14: Het gecodeerde bericht

2.5 De ontknoping

De tijd voor de ontknoping is aangebroken. Kopieer de afbeeldingen van figuur 13 en figuur 14 op een transparant, leg de transparanten precies over elkaar en bekijk het originele bericht (in dit geval: de olifant).

We merken op dat de decodering zonder computer een zekere tol heeft geëist. In plaats van een zwarte olifant op een witte achtergrond zien we nu een zwarte olifant op een 50% grijsgestippelde achtergrond (zie figuur 15).

Ben je niet tevreden met de visuele decodering van een bericht dan kan je ook digitaal decoderen in Excel. Dit doe je opnieuw met de functie $f(x, y) = 1 - \text{REST}(x + y, 2)$. Ditmaal verwijst de variabele x naar een cel in de sleutel en y naar een cel in het gecodeerde bericht. Ga na waarom deze functie het gewenste effect heeft.



Figuur 15: De visuele decodering van het bericht

Bij de visuele decodering kunnen verschillende problemen optreden. Eerst en vooral is het nodig dat de hokjes op beide transparanten precies even groot zijn. De screenshots neem je dus met een uiterste precisie. Geen enkele prent mag door een manuele uitrekking vergroot of verkleind worden.

Verder zal je wel vermoeden dat het eindresultaat zich beter aftekent tegen de achtergrond wanneer de zwarte hokjes kleiner zijn. Als je de hokjes echter te klein neemt, zal het motorisch niet meer haalbaar zijn om de transparanten secuur op elkaar te leggen.

En tot slot merk je best op dat er een verschil is tussen vierkantjes *wit* en vierkantjes *transparant* in te kleuren. De truc met de transparanten lukt enkel bij een transparante inkleuring van de witte hokjes.

3 Derde techniek: vermengen van afbeeldingen

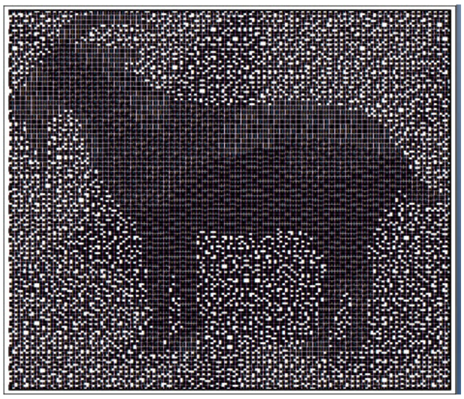
Volgens gerenommeerd cryptografen bestaat er bij de visuele cryptografie een reëel gevaar dat de sleutel ontvreemd wordt, vooral wanneer hij meermaals hergebruikt wordt. Cryptografen raden aan om te werken met een verzameling van sleutels, die afwisselend gebruikt worden.

Sleutels voor visuele cryptografie hebben het nadeel herkenbaar te zijn. Een transparant met chaotische pixels in zwart en wit kan je immers niet voor veel andere doeleinden gebruiken dan voor cryptografische versleuteling. Daarom werd er een techniek ontwikkeld om de sleutels (en de versleutelde boodschap) te camoufleren met een afleidingsfiguur. Een voorbeeld maakt duidelijk hoe dit werkt.

3.1 Voorbeeld

Als voorbeeld van deze camouflage laten we in figuur 16 een afbeelding zien van een sleutel (het konijn) en van een gecodeerd bericht (de vis). Beide dieren zijn afleiders. Ze hebben niets met de geheime boodschap te maken. Als je deze transparanten met precisie over elkaar legt, verschijnt de geheime boodschap (de bok), zie figuur 17.

Figuur 16: De sleutel en het gecodeerde bericht

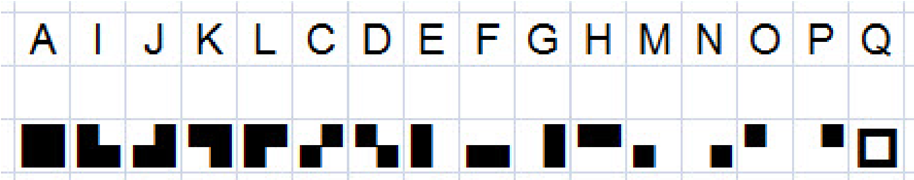


Figuur 17: Het gedecodeerde bericht

De supplementaire complicatie van de afleidingsfiguren vraagt een bijkomende tol. De drie afbeeldingen zijn nu iets minder scherp afgelijnd, er is minder contrast van de figuur met de achtergrond. Bovendien is er een verschil tussen de afbeeldingen in figuur 16 en die in figuur 17. De eerste twee afbeeldingen zijn 75% grijs tegen een achtergrond die 50% grijs is. De laatste afbeelding is 100% grijs (zwart) tegen een achtergrond die 75% grijs is. Dit verschil is essentieel voor het ontwerpen van dit type van visuele cryptografie. We leggen verderop uit hoe het vermengen van verschillende grijswaarden kan benut worden in de visuele cryptografie.

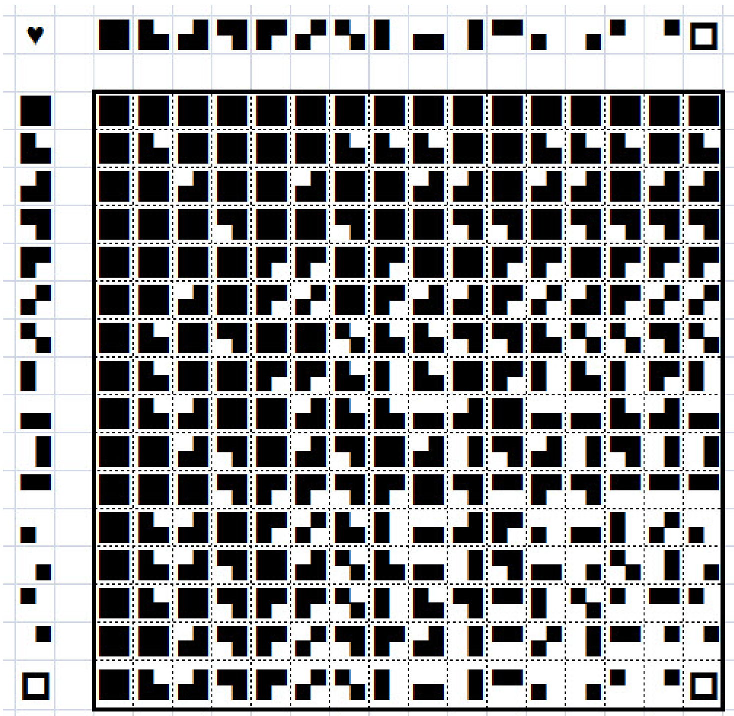
3.2 Een lettertype met 16 tekens

Als je in Excel pixel per pixel onderscheid wil maken tussen verschillende grijswaarden, heb je een zelfgemaakt lettertype nodig waarbij elke letter bestaat uit vier blokjes die wit of zwart kunnen zijn. In totaal heb je 16 verschillende letters in dit lettertype. Je ziet ze in figuur 18. Uiterst links staat de letter A die 100% zwart is. De letters I, J, K en L zijn 75%grijs. Dan volgen de letters C, D, E, F, G en H die 50% grijs zijn. De letters M, N, O en P staan voor letters die 25% grijs zijn. En uiterst rechts vind je een symbool voor het volledig transparante hokje. De laatste vijf symbolen zullen we niet nodig hebben bij de visuele cryptografie. Ze worden enkel voor de volledigheid vermeld.



Figuur 18: Lettertype met 16 letters

Als je twee willekeurige 'lettertekens' transparant op elkaar legt, zie je een letterteken dat je als de som van de twee afzonderlijke lettertekens zou kunnen beschouwen. Deze som is een bewerking die we in het vervolg met een ♡ zullen aanduiden. De bewerking ♡ kan schematisch vastgelegd worden in de Cayley-tabel uit figuur 19.



Figuur 19: Cayleytabel van de bewerking ♡

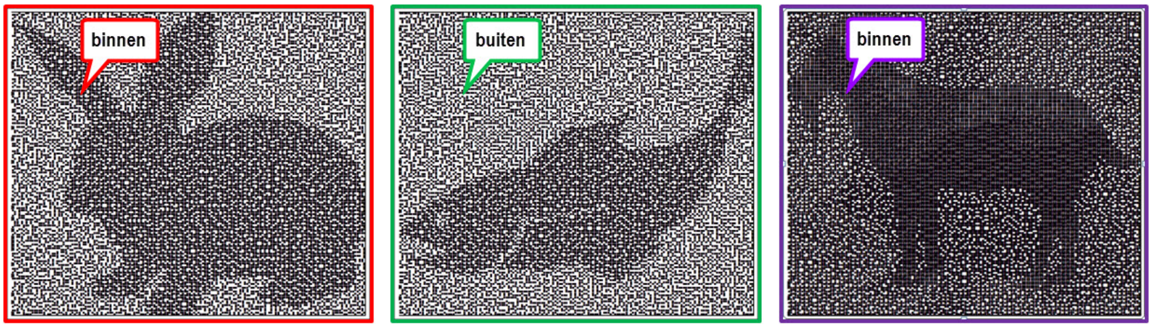
De bewerking ♡ heeft enkele merkwaardige eigenschappen die je wellicht zelf kan ontdekken. Is er een neutraal element voor de bewerking ♡ in de verzameling van deze 16 letters? Hoe zie je dit aan de Cayley-tabel? Is de bewerking ♡

commutatief in deze letterverzameling? Hoe lees je dit af uit de Cayley-tabel? Maak een redenering om aan te tonen dat de bewerking ♡ associatief is in de verzameling met de 16 letters. Is er voor elke letter een inverse letter voor de bewerking ♡? Toon dit aan. Is de verzameling van deze 16 lettertekens uitgerust met de bewerking ♡ een commutatieve groep?

3.3 Konijn + vis = bok

In een eerdere paragraaf zagen we dat het mogelijk is om een afbeelding van een konijn te vermengen met een afbeelding van een vis om een bokje te bekomen. Om het mechanisme hierachter te begrijpen, moeten we pixel per pixel bekijken wat er gebeurt.

In figuur 20 zijn drie overeenkomstige pixels aangeduid in de twee bronafbeeldingen (konijn en vis) en in het gedecodeerde bericht (bok). Deze pixels kunnen binnen of buiten de figuur liggen en worden respectievelijk licht of donker ingekleurd. In totaal heb je acht verschillende situaties. De situatie die hieronder aangeduid is vatten we samen als 'binnen + buiten = binnen' of als 'donker + licht = donker' (korter: dld).



Figuur 20: Overeenkomstige pixels in drie afbeeldingen

Hoe kunnen we er met het zelfgemaakte lettertype voor zorgen dat donker (75%) plus licht (50%) gelijk is aan donker (100%)? Wel, dat kan op 12 manieren. Ze zijn samengevat in de tabel van figuur 21. Het zou ideaal zijn als er in de drie figuren voldoende kan afgewisseld worden tussen deze 12 mogelijkheden om donker en licht om te kunnen zetten in donker maar het is geen must.

Er zijn veel minder mogelijkheden om licht en licht om te zetten in donker (lld). Kan je ze opsommen? En er zijn nog minder mogelijkheden om donker en donker om te zetten in licht (ddl). Kan je hier een overzicht van geven?

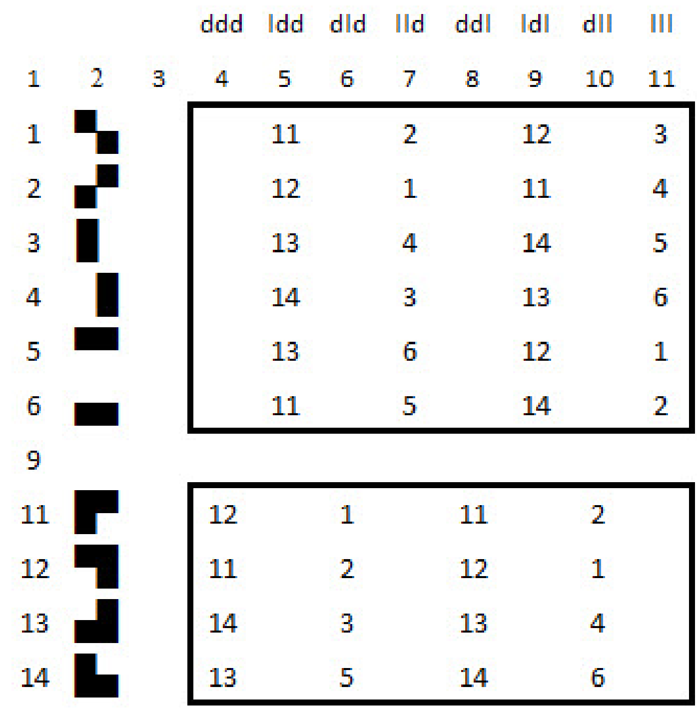
Voor je verder gaat zou je voor jezelf een overzicht moeten maken van de acht mogelijkheden bij de pixelverwerking. Zoek dus minstens één oplossing voor het probleem van 'licht plus licht is licht' (lll), 'licht plus licht is donker' (lld), 'licht plus donker is licht'(ldl), 'licht plus donker is donker' (ldd), 'donker plus licht is licht' (dll), 'donker plus licht is donker' (dld), 'donker plus donker is licht' (ddl) en 'donker plus donker is donker' (ddd). Dit overzicht is nodig voor de verwerking in Excel.

Figuur 21: Donker ♡ licht = donker

3.4 Verwerking in Excel

Techniek

Cruciaal in de verwerking met Excel is het gebruikte algoritme. Dit bestaat uit een overzicht van de acht gevallen, die je hierboven opsomde.



Figuur 22: Schema voor de overlapping van pixels

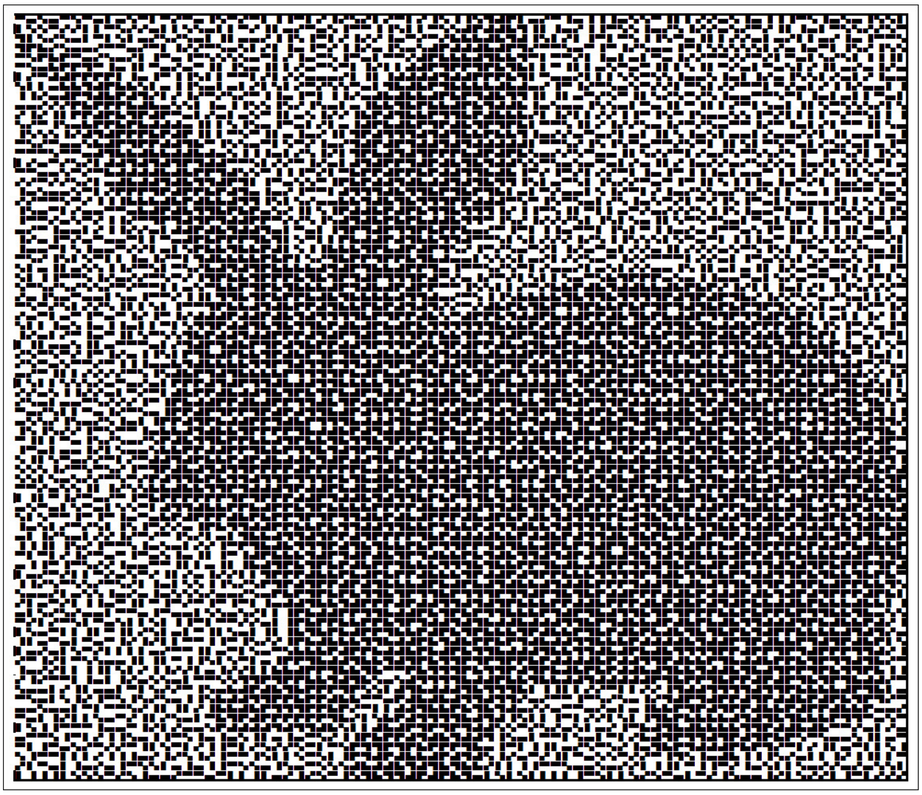
Begin bovenaan je Excelsheet met een overzicht waarbij voor elk van deze acht gevallen (ddd, ldd, dld, ...) een keuze wordt gemaakt tussen de pixels die boven elkaar kunnen gelegd worden. Dit overzicht kan er uit zien als in de bovenstaande figuur. Probeer te begrijpen hoe dit overzicht in elkaar zit.

Drie figuren digitaliseren

De volgend stap van dit project is het digitaliseren van drie silhouetfiguen. Dit gaat ongeveer zoals bij het *geheimschrift met blokjes*: maak de drie figuren even groot, zet ze om in een binary image, zet de drie figuren met nullen en enen naast elkaar je Excelsheet. Tot hier is het enkel een herhaling van wat je al eerder deed.

Vervolgens bewerk je de drie binaire tabellen in Excel. Je zorgt ervoor dat alle enen (die staan voor een lichte kleur) vervangen worden door een willekeurig geheel getal van 1 tot 6 en dat alle nullen (die staan voor een donkere kleur) vervangen worden door een willekeurig geheel getal van 11 tot 14.

Als je wil controleren of de drie figuren correct zijn weergegeven dan vervang je deze randomgetallen door de tekens uit de tweede kolom van het schema uit figuur 22. In Excel doe je dit met de instructie VERT.ZOEKEN. Je vindt dan drie grafische voorstellingen waaronder het konijn in figuur 23. Alleen de eerste van de drie figuren druk je af op een transparant. Deze eerste transparant is de sleutel. De twee andere figuren zijn werkinstrumenten voor wat volgt.



Figuur 23: Gedigitaliseerde afbeelding van een konijn

Ontwerpen van de tweede transparant

Dit is de moeilijkste fase in de versleuteling: ontwerp een figuur die bovenop figuur 1 (het konijn) kan liggen, die figuur 2 (de vis) voorstelt en die bij de proef met de transparanten figuur 3 (de bok) genereert. We leggen niet precies uit hoe je dit algoritme programmeert maar wel hoe je beslist welke inkleuring je aan de pixels uit de tweede transparant geeft.

Neem een welbepaalde pixel in gedachte, bijvoorbeeld de pixel linksboven. Kijk na of deze pixel in elk van de drie afbeelding licht of donker is. Dit kan je zien aan het randomgetal dat in deze cel staat: kleiner dan 10 betekent licht en groter dan 10 betekent donker. Naargelang het antwoord 'ddd', 'ldd', 'dld', ... is moet je de pixel voor de tweede transparant halen uit kolom 4, 5, 6 ... 11 van het schema in figuur 22. De juiste pixel uit deze kolom selecteren doe je opnieuw met de Excel-instructie VERT.ZOEKEN.

Het staat vast dat het ontwerpen van de middelste prent alleen weggelegd is voor onverschrokken programmeurs. Het is geen kinderspel. Als het gelukt is om deze tweede transparant te genereren, druk je hem af voor de ultieme proef.

3.5 Een animatiefilmpje

Ben je niet zo handig in het zorgvuldig over elkaar schuiven van transparanten dan hoef je dit ook niet te doen. Je kan een filmpje maken van over elkaar schuivende transparanten.

Bewerk je twee afbeeldingen eerst zo dat de witte hokjes transparant gemaakt worden. Dit kan met bijna om het even welk fotobewerkingsprogramma. Leg de twee digitale transparanten daarna naast elkaar op een leeg blad van een tekstverwerker. Met een muisgestuurd handje kan je de ene dan over de andere slepen. Als je alles goed gedaan hebt, zie je de derde afbeelding (de bok) en kan je een filmpje proberen te maken van je cryptografisch hoogstandje. Achtergrondmuziek en ingesproken commentaar kunnen een meerwaarde zijn.

Figuur 24: Animatiefilm: konijn + vis = bok

Inhoudsopgave

Referenties

[1] G. Hautekiet en M. Roelens. *Wiskunde achter beeldverwerking.* Uitwiskeling 22/4, 21-24. Acco, Leuven, ISSN 0774-6814, 2016.

[2] J. P. Delahaye. *Spelen met rekenkunde en geometrie: wiskundige uitvindingen*, 138-147. Veen Media, Amsterdam, ISBN 9789085715016, 2015.

[3] F. Kern, B. Burgereth en D. Eichhorn. *Algoritmen zur Bildbearbeitung.* Mathematik Lehren 188, Friedricht Verlach, Seelze, 2015.

[4] J. P. Delahaye. *La Cryptographie visuelle.* http://www.lifl.fr/ jdelahay/pls/223.pdf